



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.В. Яценко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные на основе
анализа типичных ошибок участников
ЕГЭ 2017 года
по МАТЕМАТИКЕ**

Распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р, принятым в соответствии с Указом Президента РФ от 07.05.2012 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации, определяющая базовые принципы, цели, задачи и основные направления. Согласно Концепции математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой – «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.». Кроме того, «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования».

В число мер по реализации Концепции, принятых приказом Минобрнауки России от 03.04.2014 № 265, входит «совершенствование системы государственной итоговой аттестации, завершающей освоение основных образовательных программ основного общего и среднего образования, по математике, разработка соответствующих контрольных измерительных материалов, обеспечивающих введение различных направлений изучения математики», т.е. материалов, предназначенных для различных целевых групп выпускников.

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (2004 г.). Варианты КИМ составлялись на основе кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для

проведения в 2017 г. ЕГЭ по математике.

В 2017 г. ЕГЭ по математике проводился на двух уровнях в третий раз. Участник экзамена имел право самостоятельно выбрать любой из уровней либо оба уровня в зависимости от своих образовательных запросов, а также перспектив продолжения образования. Для поступления в высшее учебное заведение на специальность, где математика является одним из вступительных требований, абитуриент был должен выполнить экзаменационные требования на профильном уровне. Для поступления на специальности, не связанные с математикой, а также для получения аттестата о среднем полном образовании достаточно выполнения аттестационных требований на базовом уровне. Статистика выбора экзамена в основную волну показала более осмысленный выбор уровня экзамена выпускниками, эффективность модели двухуровневого экзамена. При общем сокращении числа выбравших профильный уровень выросла доля получивших 80–100 баллов (2016 г. – 4,05%; 2017 г. – 4,78%) и 60–100 баллов (2016 г. – 29,1%; 2017 г. – 30,77%)¹, что говорит о более качественной подготовке школой обучающихся на специальности, где экзамен по математике является профильным.

В 2017 г. были установлены минимальные пороги: по математике профильного уровня – 27 тестовых баллов (6 первичных); по математике базового уровня 7 первичных баллов, соответствующих 3 баллам по пятибалльной шкале.

В 2017 г. 100 баллов получили 224 участника экзамена по математике профильного уровня (в 2016 г. — 301 участник). Максимальный балл по математике базового уровня (5 баллов по пятибалльной шкале) получили 44,9% участников экзамена (в 2016 г. — 40,1%). Высокие баллы по математике базового уровня (4 и 5 баллов по пятибалльной шкале) получили 82,5% участников экзамена (в 2016 г. — 79,3%).

¹ Здесь и далее представлены результаты основного периода проведения экзамена по состоянию на 12.06.2017.

Единый государственный уровень по математике профильного уровня

КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2017 г. по сравнению с 2016 г. не претерпели изменений в содержательном плане. В отдельных заданиях второй части были сделаны незначительные изменения сложности для улучшения соответствия общей трудности КИМ целевой группе участников профильного экзамена. Был несколько расширен круг сюжетов задания 17, незначительно упрощены геометрические конструкции в задании 14 и изменены подходы к разработке заданий 15 (неравенство) с целью исключения искусственных выражений с логарифмами по переменному основанию.

Работа в 2017 г. состояла из двух частей и содержала 19 заданий, позволяющих участникам экзамена продемонстрировать уровень освоения требований стандарта и готовность к продолжению образования в высших учебных заведениях на специальностях с различными уровнями требований по математике.

Часть 1 содержит 8 заданий (1–8) с кратким числовым ответом, проверяющих наличие практических математических знаний и умений базового уровня.

Часть 2 содержит 11 заданий по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки: четыре задания (9–12) с кратким ответом и семь заданий (13–19) с развернутым ответом.

Задания делятся на три тематических модуля: «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия» и «Практико-ориентированные задания».

Задания 1, 2, 4 первой части и задания 10 и 17 второй части представляют практико-ориентированный модуль, включая задание по теории вероятностей.

Задания 3, 6, 8 первой части, задания 14, 16 второй части геометрические.

Задания 5, 7 первой части и задания 9, 11, 12, 13, 15, 18 и 19 второй части – это задания разного уровня сложности по алгебре и началам математического анализа, включая задания на составление математических моделей в виде уравнений или неравенств, а также задания по элементам математического

анализа, призванные проверить базовые понятия математического анализа и умение применять стандартные алгоритмы при решении задач.

Высокие показатели успешности продемонстрированы при решении первых шести заданий базового уровня – выше 70%, что свидетельствует о сформированности у участников экзамена базовых математических компетенций за курс математики основной и средней общеобразовательной школы, необходимых для обучения в вузах на специальностях, не предъявляющих высоких требований к уровню математической подготовки абитуриентов. Эти задания проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, выполнять действия с геометрическими фигурами, исследовать простейшие математические модели, решать уравнения. Задания этого блока включали в себя следующее предметное содержание: действия с целыми числами; табличное и графическое представление данных, чтение диаграмм и применение математических методов для решения содержательных задач из практики; вычисление площадей треугольника и трапеции, длин отрезков, углов геометрических фигур; вычисление вероятности события; решение показательных, логарифмических, иррациональных, рациональных уравнений.

В 2017 г. ненулевой балл получили свыше половины участников за выполнение заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Наилучшие показатели отмечены при выполнении алгебраического задания 13 – решение тригонометрического уравнения с отбором корней (2015 г. – 27,4%; 2016 г. – 38,9%; 2017 г. – 40,1%) и практико-ориентированного задания 17 – решение текстовой задачи с экономическим содержанием (2015 г. – 2,3%; 2016 г. – 13%; 2017 г. – 14,8%). Эти изменения свидетельствуют о качественном обучении математике в старшей школе и более четкой подготовке обучающихся к обучению в вузе.

Успешность выполнения заданий с развернутым ответом свидетельствует о том, что более четверти участников экзамена владеют на хорошем уровне

программой по математике за курс основной и старшей школы и могут письменно оформить результаты своих рассуждений.

Практико-ориентированные задания базового уровня

Для заданий базового уровня первой части (1, 2, 4), проверяющих умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели, уровень усвоения достигнут (свыше 50%). Практико-ориентированные задачи не являются для участников неожиданными, задания такого типа они решали при сдаче основного государственного экзамена в модуле «Реальная математика». Умение решать задания этого модуля (не менее двух) являлось обязательным для прохождения аттестационного рубежа в большинстве регионов Российской Федерации, поэтому такие задания учащиеся решали на уроках математики основной школы. Задания такого типа также включались в учебный материал при изучении математики в старшей школе.

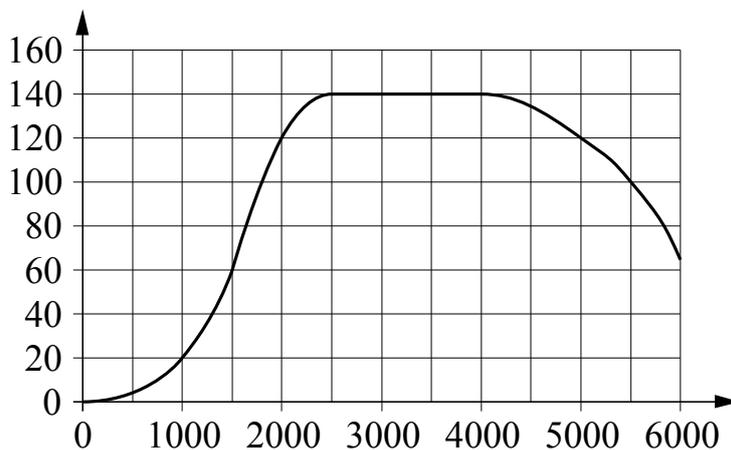
Задание 1 проверяло умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни – решать текстовые задачи. Ниже приведен пример задания.

Задание 1. Цена на электрический чайник была повышена на 25% и составила 1625 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Выполнение этого задания – около 87%. Типичные ошибки связаны в первую очередь с неумением читать условие и пониманием процентов: около 6% участников экзамена, выполнявших это задание, посчитали, что «если цена была повышена на 25%, то для нахождения старой цены нужно новую цену понизить на 25%»; около 0,5% участников «прочитали», что 25% – это 1625 рублей.

Задание 2 проверяло умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни – читать графики. Ниже приведен пример такого задания.

Задание 2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м. Определите по графику крутящий момент, если двигатель совершал 5000 оборотов в минуту. Ответ дайте в Н·м.



Выполнение этого задания – около 98%. Нетипичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия и пониманием единиц измерения; например, несколько участников экзамена, выполнявших это задание, посчитали, что «Н·м» означает, что крутящий момент нужно умножить на число оборотов двигателя.

Задание 4 проверяло умение строить и исследовать простейшие математические модели, а также умение находить вероятность события в простейшей ситуации. Ниже приведен пример такого задания.

Задание 4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

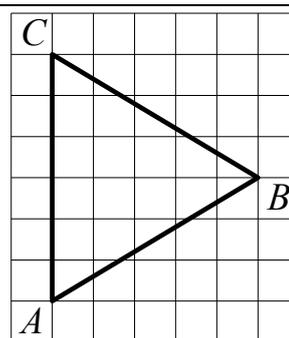
Выполнение этого задания – около 87%. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия: около 2,5% нашли вероятность выбора подтекающего насоса, не обратив внимания на частицу «не» в условии.

Геометрические задания базового уровня

Для заданий базового уровня первой части (3, 6, 8), проверяющих умения выполнять действия с геометрическими фигурами по содержанию курсов «Планиметрия» и «Стереометрия», достигнут уровень усвоения выше 50%.

В задании 3 проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, знание геометрических фактов и понятий и умение вычислять длину отрезка на клетчатой бумаге. Пример такого задания приведен ниже.

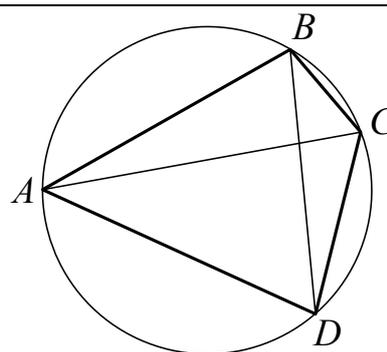
Задание 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC . Найдите длину его биссектрисы, проведенной из вершины B .



Выполнение этого задания – около 87%. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия: около 2,5% участников, выполнявших это задание, нашли площадь треугольника.

В задании 6 проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами. Ниже приведен пример.

Задание 6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 98° , угол CAD равен 44° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

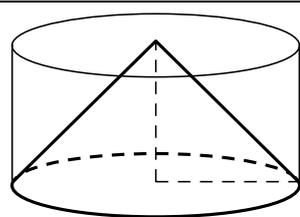


Выполнение этого задания – около 69%, что свидетельствует, с одной стороны, о росте уровня геометрической подготовки учащихся (по сравнению с 2010 г., когда задания по геометрии впервые были включены в ЕГЭ как обязательные и имели крайне низкий процент выполнения), а с другой стороны, о том, что заметные пробелы в геометрической подготовке сохраняются

у значительной части учащихся. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением (не пониманием) математической записи угла и неверным чтением чертежа: около 10% участников, выполнявших это задание, вместо «угол ABC равен 98° » прочитали «угол ABD равен 98° » и вместо «угол CAD равен 44° » – «угол ACD равен 44° », около 5% участников «увидели» прямоугольный треугольник ACD , а еще 3% «увидели» равносторонний треугольник ABD .

В задании 8 проверялось умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами – на соотношение нахождения объемов конуса и цилиндра с равными радиусами основания и высотами и применение формулы боковой поверхности конуса. Для участников это задание оказалось сложным. Ниже приведен пример такого задания.

Задание 8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Выполнение этого задания – около 42%. Около 8% не дали никакого ответа. Почти 38% участников ошиблись в формуле площади боковой поверхности конуса, при этом почти 12% ошибочно использовали числовой коэффициент из формулы объема конуса. Задание важное, показательное, так как оно проверяет сформированность пространственных представлений и знание соотношений между величинами пространственных фигур. Более половины выпускников продемонстрировали отсутствие этих качеств. Разумеется, при отсутствии базовых пространственных представлений и знаний соотношений сложно ожидать высокого процента выполнения стереометрического задания с полным решением. Следует также отметить, что процент выполнения этого задания существенно ниже, чем, например, процент выполнения гораздо более сложного задания на решение тригонометрического уравнения с отбором корней. Это означает, что низкий процент выполнения заданий по стереометрии вызван

существенными проблемами в преподавании стереометрии, формальным характером уроков, уклоном в вычислительные задачи, а в некоторых школах — существенному перекосу в сторону алгебры и начал анализа. Следует подчеркнуть важность геометрических знаний для успешного дальнейшего обучения в инженерных вузах. В преподавании геометрии важным является умение не только решать по формулам вычислительные задачи с геометрическим содержанием, но и формировать геометрические представления о фигурах.

Алгебраические задания базового уровня

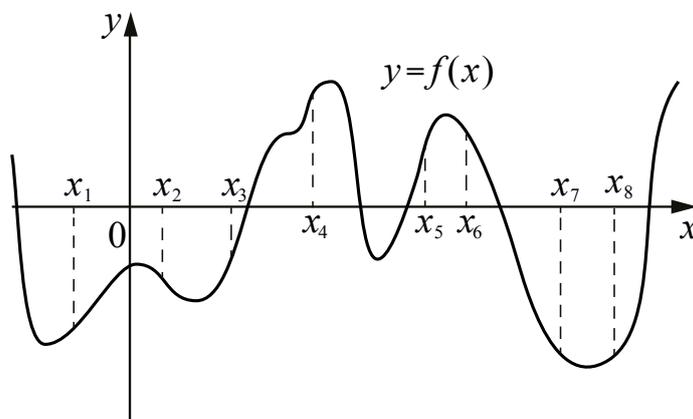
В задании 5 проверялось умение решать простейшее логарифмическое, показательное уравнение. Пример такого задания приведен ниже.

Задание 5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} = 6^x$.

Выполнение этого задания – около 93%. Почти 2% участников ошиблись в свойствах степеней.

Задание 7 проверяло умение выполнять действия с функциями – применение производной к исследованию функции. Пример такого задания приведен ниже.

Задание 7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Выполнение этого задания – около 69%. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия: почти 24% участников указали

количество точек, в которых значение функции положительно, а еще около 2% участников пытались перечислить номера точек, в которых производная принимает положительные значения.

Практико-ориентированные задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 10 (с кратким ответом) и 17 (с развернутым ответом). Задания проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Задание 10 проверяло умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни – работать с формулой, находить значение одного из параметров. Пример такого задания приведен ниже.

Задание 10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 36$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 см до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким? Ответ дайте в сантиметрах.

Выполнение этого задания – около 57%. Не дали ответа 8% участников экзамена, выполнявших это задание. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия или с непониманием текста: почти 6% участников решили, что чем ближе, тем лучше; еще 4% решили, что нужно лампочку поместить в середину разрешенного интервала, а еще около 4,5% участников решили, что самый главный параметр – это фокус.

Задание 17 с развернутым ответом проверяло способность использовать знания в практической деятельности и повседневной жизни, умение строить и

исследовать математические модели. Это – текстовая задача с экономическим содержанием (задача на кредиты). Пример такого задания приведен ниже.

Задание 17. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Ненулевые баллы за это задание получили около 15%, максимальные – около 8% участников экзамена. Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным составлением модели задачи (непонимание взаимосвязи величин) и вычислительными ошибками. Многие без всяких обоснований писали сразу формулу (не всегда имеющую отношение к задаче) или пытались решить задачу подбором. Видимо, многие участники экзамена считают, что решать задачу не обязательно, достаточно каким-то образом получить ответ. В целом, показатель выполнения этого задания хороший, что особенно важно с учетом того, что значительная часть специальностей, на которые требуется профильная математика, имеет практико-ориентированную направленность, в том числе экономическую или финансовую.

Геометрические задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 14 (стереометрия) и 16 (планиметрия) с развернутым ответом. Задания проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Оба задания содержали два пункта. В первом пункте задание нужно доказать, а во втором пункте – вычислить. Примеры таких заданий приведены ниже.

Задание 14. На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки

M и N соответственно, причем $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Ненулевые баллы за эту задачу получили около 11% участников экзамена. Основной проблемой оказалось выполнение первого пункта. Участники экзамена часто демонстрировали неумение доказывать, непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции, часто ошибались в теоретических фактах. Много встречается разного рода логических ошибок, например: «предположим, что точки лежат в одной плоскости...» При выполнении второго пункта участники нередко демонстрировали незнание отношений объемов многогранников. Особо следует отметить большое количество разного рода ошибок, допущенных участниками при построении чертежа.

Задание 16. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

Это задание выполнялось значительно хуже заданий высокого уровня сложности (18 и 19). Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства; например, доказательство начинается так: «Пусть точка O является серединой отрезка CK ...» При выполнении второго пункта участники допускали ошибки в отношении площадей подобных фигур или не считали нужным доказывать геометрические факты, используемые в решение. Особо следует отметить большое количество, допущенных участниками при построении чертежа.

Алгебраические задания повышенного уровня

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 9, 11, 12 с кратким ответом и задания 13, 15 с развернутым ответом.

Задание 9 проверяло умение выполнять вычисления и преобразования тригонометрических выражений.

Задание 9. Найдите значение выражения $\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{7\pi}{8}$.

Выполнение этого задания – около 34%. Не дали ответа 9% участников экзамена, выполнявших это задание. Типичные ошибки связаны в первую очередь с определением знака тригонометрической функции: почти 12% участников потеряли знак минус, еще 22% решили, что ожидается ответ 1 или 2.

Задание 11 проверяло умение строить и исследовать простейшие математические модели – решать текстовые задачи на движение.

Задание 11. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 27 км/ч, проходит некоторое расстояние по реке и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 32 часа после отправления из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

Выполнение этого задания – около 31%. Не дали ответа 8% участников экзамена, выполнявших это задание. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия задачи: почти 16% участников нашли расстояние между пунктами отправки и стоянки, допущено множество вычислительных ошибок. Около 10% показали непонимание самого процесса движения по реке – собственную скорость теплохода умножали на время движения.

Задание 12 проверяло умение выполнять действия с функциями – применение производной к исследованию функции.

Задание 12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 28x + 96 \cdot \ln x + 31$.

Выполнение этого задания – около 54%. Не дали ответа около 10% участников экзамена, выполнявших это задание. Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия задачи или непониманием алгоритма исследования функции с помощью производной: почти 7% участников в ответе записали точку максимума. Около 5% участников продемонстрировали неумение находить производную логарифмической функции.

Задание 13 проверяло умение решать тригонометрическое уравнение. Пример такого задания приведен ниже.

Задание 13. а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ненулевые баллы за это задание получили около 48% участников экзамена; максимальный балл – около 38%. Основной проблемой выполнения первого пункта оказалось неумение вводить новую переменную (ошибка в свойствах степеней), незнание формул решения простейшего тригонометрического уравнения. При выполнении второго пункта участники экзамена часто демонстрировали небрежность при отборе корней с помощью тригонометрической окружности или неумение отбирать корни.

Задание 15 проверяло умение решать неравенства. Пример такого задания приведен ниже.

Задание 15. Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$.

Ненулевые баллы за это задание получили около 15% участников экзамена; максимальный балл – около 11%. Типичные ошибки связаны с невнимательным чтением математической записи неравенства, непониманием алгоритма решения совокупностей и систем логарифмических неравенств. Очень много ошибок допущено участниками экзамена при решении дробно-рационального неравенства (забыт знаменатель). Следует отметить небрежность, которая была во многих работах, при изображении множеств на координатной прямой.

Алгебраические задания высокого уровня

Задания высокого уровня сложности – это задания на комбинирование различных методов и рассуждений. Эти задания предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. К заданиям высокого уровня относились задания второй части 18 и 19 с развернутым ответом. Максимальный балл (4 балла) и за то, и за другое задание получили в среднем менее 1% участников.

Для успешного выполнения задания 18, помимо прочных математических знаний, необходим высокий уровень математической культуры, которая формируется в течение периода обучения по программе профильного уровня.

Задание 18 проверяло умение решать уравнения и неравенства. Пример такого задания приведен ниже.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Ненулевые баллы за это задание получили около 3% участников экзамена. Основной проблемой оказалось неумелое применение графического метода решения, который, как показали работы, недостаточно сформирован у участников экзамена. Об этом свидетельствует массовое отсутствие описаний сделанных чертежей и конструкций, а также значительное число работ, в которых ответ на поставленный вопрос отсутствует, несмотря на обилие всевозможных построений.

Задание 19 проверяло умение строить и исследовать простейшие математические модели, умение осуществлять поиск решения, выбирая различные подходы из числа известных, модифицируя изученные методы решать уравнения и неравенства. Пример такого задания приведен ниже.

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
- б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

Ненулевые баллы за это задание получили около 17% участников экзамена, 1 балл – около 12%. Первый пункт выполнили те, кто внимательно прочитал условие, понял закономерности, исследовал несколько примеров и обобщил результат. Массовая ошибка в том, что на вопрос «может ли» следует короткий ответ «да» или «нет» без обоснований.

Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы группами выпускников с различным уровнем подготовки

На протяжении ряда лет кластерный анализ результатов экзамена позволяет выделить относительно однородные группы участников экзамена, обладающих примерно одинаковым уровнем подготовки и близкими образовательными запросами. В связи с поставленными задачами индивидуализации математического образования и переходу к анализу и определению направлений математической подготовки анализ выполнения заданий различными группами участников экзамена представляет растущий интерес.

Качественный состав групп мало изменился по сравнению с предыдущими годами, однако наметилась небольшое улучшение в структуре групп. Это связано в первую очередь с переходом к двухуровневому экзамену. Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы профильного уровня группами выпускников с различным уровнем подготовки дана в таблице 1.

Табл. 1. Описание групп участников экзамена

Группы	Описание уровня подготовки
Группа I (минимальный) Тестовый балл: 0–23 Первичный балл: 0–5 Доля от всех участников экзамена – 14,3%	Выпускники, не обладающие математическими умениями на базовом, общественно значимом уровне
Группа II (базовый 1) Тестовый балл: 27 – 50 Первичный балл: 6 – 10 Доля от всех участников экзамена – 47,6%	Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям
Группа III (базовый 2) Тестовый балл: 56–68 Первичный балл: 11–13 Доля от всех участников экзамена – 18,8%	Выпускники, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки. Фактически могут быть зачислены на технические специальности большинства вузов
Группа IV (повышенный) Тестовый балл: 70–86 Первичный балл: 14–22 Доля от всех участников экзамена – 18,2%	Выпускники, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности
Группа V (высокий) Тестовый балл: 88–100 Первичный балл: 23–32 Доля от всех участников экзамена – 1,1%	Выпускники, освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к математической компетентности

В группу I (тестовый балл 0–23) попадают экзаменуемые, фактически не овладевшие математическими знаниями, нужными в повседневной жизни, и допускающие значительное количество ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи. В 2017 г. в эту группу попали 14,3% участников, что ниже аналогичного показателя прошлого года (15,3%). Снижение численности группы

в первую очередь связано с тем, что значительная часть слабоуспевающих учащихся выбрала только базовый уровень экзамена ЕГЭ.

Группы II (т.б. 27–50) и III (т.б. 56–68) наиболее массовые, в них входят участники экзамена, успешно освоившие курс математики полной (средней) школы на базовом уровне, но часто не имеющие мотивации для более углубленного изучения математики. В частности, выпускники, планирующие продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук, обычно распределяют свои усилия соответствующим образом. Учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих четких мотиваций или испытывающих определенные затруднения, но желающих освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет интерес выделение группы III «ближайшего резерва». Численность групп II и III незначительно выросла за счет сокращения группы I. Значительное число участников ЕГЭ из групп II и III сдавали ЕГЭ на базовом и профильном уровнях. Практика 2015–2017 г. показала оправданность такого выбора. В частности, психологический комфорт на профильном экзамене повышает результативность решения задач.

Группа IV (т.б. 70–86) – это в основном хорошо подготовленные абитуриенты технических вузов. Отметим, что их число меньше количества бюджетных мест по техническим специальностям. Фактически, в последние годы на технические специальности, а также на специальность «учитель математики» зачисляются выпускники из группы III.

Группа V (т.б. 88–100) – это контингент абитуриентов физико-математических специальностей ведущих университетов, фундаментальных специальностей технических и экономических вузов. Эта группа в значительной части состоит из выпускников специализированных математических школ и классов, осуществляющих традиционно высокий уровень преподавания. Количество часов математики обычно не менее 8. Количественный состав группы в целом соответствует запросам вузов в настоящий момент. Однако распределение участников этой группы по регионам неравномерно, что связано не

только с наличием или отсутствием специализированных школ в регионе, но и с особенностями работы органов управления образованием, которые часто не уделяют внимания работе с одаренными учащимися. Требуется развитие системы работы с одаренными детьми в области математики, особенно в сельской местности, расширение сети математических школ и классов, целевая поддержка педагогов, работающих с одаренными детьми, развитие дистанционных форм работы и нормативной базы для такой работы.

Значительная часть участников ЕГЭ из групп IV и V выбрала только профильный экзамен. Выпускники с повышенным и высоким уровнями подготовки освоили базовые требования, и допускают лишь единичные ошибки в заданиях первой части. Этот вывод подтверждается высокими результатами выпускников этих групп и небольшими колебаниями результатов по отдельным заданиям.

Результаты выпускников с базовым уровнем подготовки неоднородны. Отношение результатов по разным заданиям значительно колеблется, причем разрыв увеличивается по мере возрастания сложности заданий.

Как и в прошлые годы имеется значительная разница в результатах групп II и III по заданиям 5–12. Все эти задания, кроме одного – двух, соответствуют материалу 10–11 классов. Группа II усваивает материал курса математики старшей школы значительно хуже, чем Группа III. Задание 11 требует составления математической модели по данным текстовой задачи и здесь сильно сказывается разница в общей математической культуре между группами. В экзамене присутствует алгоритмическое задание 10; оно проверяет компетентность в области выполнения предложенных, но не заученных алгоритмов. И здесь группа II показывает значительно более низкий результат, чем группа III.

Среди участников ЕГЭ по математике с низким уровнем подготовки характерно разделение между относительно высокими показателями в заданиях 1 и 2 и невысокими или низкими показателями выполнения прочих заданий. По сути, эта группа более-менее справилась только с практико-ориентированными заданиями,

т.е. фактически эта группа участников имеет существенные пробелы даже в знании материала основной школы.

Подавляющее большинство участников (более 90%) экзамена из групп IV и V получили ненулевой балл за выполнение задания 13, в то время как для групп II и III с базовой подготовкой этот показатель – около 20%. Это подтверждает то, что задание 13, аналогичное типичным заданиям на первых позициях вступительных экзаменов технических вузов, характеризует готовность участников ЕГЭ по математике к продолжению образования в технических и экономических вузах. Характер выполнения задания 14 (стереометрия) хорошо дифференцирует выпускников групп IV и V: ненулевой балл достигли менее 30% и более 90% участников соответственно. Задание 15 (неравенство) для участников из IV группы оказалось намного легче геометрической задачи 14. Следовательно, даже для выпускников с высоким уровнем подготовки алгебраическая составляющая школьного курса математики доминирует над геометрической. Аналогичная ситуация наблюдалась и в прошлые годы. В группе V это явление наблюдается реже. В группах II и III выполнение заданий 14 и 15 составило менее 4%. Доминирование подготовки по алгебре над геометрией проявляется у подавляющего большинства участников ЕГЭ. Наиболее значимая дифференциация участников с высоким уровнем математической подготовки наблюдается при выполнении заданий 16–19.

Выполнение заданий с кратким ответом в разных группах представлено в таблице 2.

Табл. 2. Выполнение заданий с кратким ответом по группам

Задание	Уровень сл.	Ср. %	Ср. % гр. I (мин.)	Ср. % гр. II, гр. III (баз.)	Ср. % гр. IV (повыш.)	Ср. % гр. V (выс.)
1	Б	91,0	66,5	92,4	98,1	99,5
2	Б	96,7	87,2	97,4	99,2	99,6
3	Б	89,8	61,1	91,8	97,7	99,1
4	Б	90,2	65,1	91,9	97,0	98,2
5	Б	92,4	62,1	95,4	99,2	99,6
6	Б	65,6	18,0	62,6	89,0	98,1
7	Б	55,2	16,2	46,7	84,5	97,1
8	Б	57,5	13,8	52,7	82,1	92,9
9	П	47,7	4,4	37,1	82,0	96,2
10	П	66,7	10,7	65,3	90,9	97,2
11	П	36,5	2,6	24,3	68,8	91,5
12	П	39,1	3,7	29,1	68,4	89,2

Группа I (минимальный уровень подготовки) сосредоточена, в основном, на выполнении базовой части профильного экзамена. Большинство этих участников экзамена выполняют также базовый экзамен. Поэтому для них профильный экзамен часто не является главным приоритетом. Часть из них идет на профильный экзамен «на всякий случай», либо по настоянию учителей и родителей. Очень многие выпускники группы I покидают аудиторию почти сразу после начала работы, сделав те задания, которые им показались легкими. Поэтому анализ выполнения заданий этой группой затруднен невысокой мотивацией значительной части ее членов.

Тем не менее из таблицы 2 видно, что практически только первые пять заданий соответствуют уровню подготовки этих участников, четыре из этих пяти заданий имеют явную практическую направленность.

Группы II и III (базовый уровень) уверенно выполняют первые пять заданий. Зоной переменного успеха для этих групп являются задания 6 (планиметрия), 7 (наглядное представление о производной), 8 (наглядная стереометрия) и 10 (анализ текста, вычисления по формуле). Задания второй части (за исключением задания 10) являются для представителей этой группы тяжелыми: выполнение не превышает 40%. Нужно учесть, что представители группы III и частично группы II составляют значительную часть абитуриентов многих региональных технических вузов.

Группа IV испытывает некоторые затруднения при решении заданий на исследование функции с помощью производной и решение текстовой задачи. Эта группа составляет основу корпуса абитуриентов технических вузов. На самом деле, анализ выполнения заданий с кратким ответом представителями групп IV и V не является информативным, поскольку, как видно из таблицы 2, различия в их подготовке резко здесь не проявляются. Их видно при анализе результатов выполнения заданий с развернутым ответом (табл. 3).

Табл. 3. Выполнение заданий с развернутым ответом по группам

Задание	Балл	Ср. %	Ср. % гр. I (мин.)	Ср. % гр. II, гр. III (баз.)	Ср. % гр. IV (повыш.)	Ср. % гр. V (выс.)
13	1	9,0	0,57	10,2	10,8	4,1
	2	31,9	0,08	12,8	76,0	93,3
14	1	8,5	0,05	2,4	19,7	44,7
	2	1,7	0,0	0,09	2,8	26,1
15	1	5,5	0,02	1,9	14,9	7,6
	2	12,4	0,01	0,79	31,7	85,0
16	1	3,4	0,1	1,1	7,4	20,4
	2	0,22	0,0	0,03	0,39	2,8
	3	1,4	0,0	0,02	1,1	29,4
17	1	4,2	0,05	2,0	10,6	3,7
	2	2,0	0,0	0,33	5,4	7,4
	3	8,6	0,0	0,25	19,7	82,6
18	1	2,0	0,0	0,18	4,2	20,5

Задание	Балл	Ср. %	Ср. % гр. I (мин.)	Ср. % гр. II, гр. III (баз.)	Ср. % гр. IV (повыщ.)	Ср. % гр. V (выс.)
	2	0,33	0,0	0,0	0,35	6,7
	3	0,15	0,0	0,0	0,07	3,9
	4	0,38	0,0	0,0	0,09	10,3
19	1	7,6	0,52	4,2	14,9	28,2
	2	1,9	0,01	0,37	3,2	21,6
	3	0,36	0,0	0,02	0,42	6,5
	4	0,36	0,0	0,0	0,25	8,4

Жирным шрифтом в таблице выделен процент участников групп IV и V, получивших максимальный балл за задания с развернутым ответом. Здесь видно, что задание 13 не позволяет хорошо различить участников повышенного и высокого уровней подготовки. Серьезные различия наблюдаются в решении заданий 14—19.

Таким образом, задания 14—19 играют важную роль, позволяя участникам с высоким уровнем подготовки, продемонстрировать свою математическую культуру.

Для участников группы V и особенно группы IV одним из критических параметров экзамена является продолжительность. Можно предположить, что при наличии большего времени значительно большее число участников успело бы решить задания 17–19. В дальнейшем совершенствование модели профильного экзамена должно пойти, в частности, по пути высвобождения времени для наиболее подготовленных участников на решение последних, наиболее трудных задач.

Надо заметить, что за последние три года процент выполнения заданий с развернутым ответом вырос практически во всех регионах. Это связано не только с повышением качества математического образования, но и с оттоком значительной части слабых участников экзамена на базовый экзамен.

Сейчас в школах сложилась практика, когда учителя только в последние год-два обучения определяют стратегию подготовки учащихся к экзамену, при этом все предыдущее изучение математики не ориентировано на конкретные индивидуальные образовательные цели. Появление базового экзамена

в определенной степени способствует тому, что учителя и родители начинают задумываться об этой стратегии заранее. Другим фактором, влияющим на дифференциацию обучения, является построение системы поиска и специального обучения математически одаренных детей. Углубляясь, эти процессы неизбежно приведут к формированию устойчивых целевых групп участников экзамена и, следовательно, более четкой специализации КИМ ЕГЭ.

На данном этапе процесс самоидентификации выражается в основном в уменьшении доли участников, выбирающих оба экзамена и в росте доли наиболее подготовленных участников, осуществляющих дополнительную индивидуальную подготовку.

Единый государственный уровень по математике базового уровня

Содержание работы ЕГЭ 2017 г. по математике базового уровня полностью совпадает с содержанием работы 2016 г. Работа построена на традициях российского математического образования, развивает подходы, заложенные в едином государственном экзамене по математике 2010–2016 гг., реализует Концепцию развития математического образования в Российской Федерации. Наличие экзамена по математике на базовом уровне позволяет существенно снизить имитацию образовательной деятельности в области математики, существенно повысить эффективность труда учителя, мотивацию к обучению у учащихся, общественное восприятие математики как социально важного учебного предмета. Согласованность и преемственность уровней экзамена, как показывает статистика, позволяет участнику, который готовился к сдаче экзамена базового уровня на полный балл, сдать экзамен профильного уровня на 60 баллов и успешно поступить в вуз. При этом в КИМ базового экзамена много заданий, проверяющих освоение умения применять математические знания в практических ситуациях, все задания базового уровня сложности.

КИМ ЕГЭ базового уровня по математике содержит 20 заданий базового уровня сложности с кратким ответом, проверяющих освоение базовых умений и навыков применения математических знаний на практике. Содержание и структура работы дают возможность полно проверить комплекс умений и навыков по предмету: использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, выполнение вычислений и преобразований, решение уравнений и неравенств, выполнение действий с функциями, выполнение действий с геометрическими фигурами, построение и исследование математической модели.

В работу включены задания по всем основным разделам предметных требований ФК ГОС: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала

математического анализа, теория вероятностей и статистика. Часть заданий имеет выраженную практическую направленность, другая часть предназначена для проверки логических навыков.

Произошло заметное улучшение выполнения практико-ориентированных заданий, за исключением задачи по наглядной геометрии на объем тела. Заметно лучше в 2017 г. стали решать важную практическую задачу на оптимальный выбор (задача 12), также лучше выполнено задание на вычисление вероятности наступления события в практической ситуации (задача 10). Рост общей математической культуры сдающих базовый экзамен отражает заметное улучшение показателей выполнения логических задач (задача 18). Также значительное число выпускников приступают и успешно выполняют задание на конструирование числа (задача 19), процент выполнения в сравнении с прошлым годом увеличился. Содержательный анализ результатов экзамена показывает, что подготовка к базовому экзамену не сводится к «натаскиванию» на решение нескольких простых заданий.

По-прежнему главными причинами ошибок остаются недостаточный уровень понимания условия при чтении задания, вычислительные ошибки, недостаточная развитость наглядных геометрических представлений. Успешность выполнения заданий экзамена по математике базового уровня показана в таблице 4.

Табл. 4. Выполнение экзаменационной работы
ЕГЭ 2017 г. по математике базового уровня

Задание	Проверяемые требования (умения)	Средний процент выполнения
1	Уметь выполнять вычисления и преобразования	83,9
2	Уметь выполнять вычисления и преобразования	86,0
3	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	89,8
4	Уметь выполнять вычисления и преобразования	91,3
5	Уметь выполнять вычисления и преобразования	73,4
6	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	91,5
7	Уметь решать уравнения и неравенства	83,8

Задание	Проверяемые требования (умения)	Средний процент выполнения
8	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	82,4
9	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	92,7
10	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	77,7
11	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	95,3
12	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	89,3
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	48,5
14	Уметь выполнять действия с функциями	93,8
15	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	65,1
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	65,9
17	Уметь решать уравнения и неравенства	57,6
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	88,1
19	Уметь выполнять вычисления и преобразования	54,9
20	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	29,8

Краткая характеристика результатов выполнения экзаменационной работы базового уровня группами выпускников с различным уровнем подготовки дана в таблице 5.

Табл. 5. Краткая характеристика выполнения экзаменационной работы базового уровня группами выпускников

Описание отдельных групп участников экзамена	Описание уровня подготовки отдельных групп участников экзамена
Группа I (минимальный). Первичный балл – менее 7 (тестовый балл 2)	Выпускники (3,5% от всех участников), не обладающие математическими умениями на базовом, общественно значимом уровне

Группа II (базовый). Первичный балл – 7–11 (тестовый балл 3)	Выпускники (14% от всех участников), освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям
Группа III (базовый). Первичный балл – 12–16 (тестовый балл 4)	Выпускники (37,6% от всех участников), успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие шансы на переход в следующую группу по уровню подготовки
Группа III (повышенный) Первичный балл – 17–20 (тестовый балл 5)	Выпускники (44,9% от всех участников), освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования в вузах с нетехнической специализацией

Группу I составляют экзаменуемые, фактически не овладевшие практическими математическими компетенциями и допускающие значительное количество ошибок в вычислениях и при чтении условия. В этом году 3,5% участников экзамена базового уровня попали в эту группу. Самый высокий процент успешности выполнения заданий участники экзамена из этой группы продемонстрировали при решении задачи 12 (на действия с числами, данными в таблице) и задачи 11 (на чтение диаграмм, графиков). Геометрические задания выполнила незначительная часть участников из этой группы. В основном они выполняли задания прикладного характера. Анализ показал, что программа по математике даже основной школы не усвоена. Учащихся с таким уровнем математической подготовки должны обучаться по специальным программам компенсирующего обучения.

Группы II и III наиболее массовые, в них входят участники экзамена, хорошо освоившие курс математики основной школы на базовом уровне. Успешность выполнения заданий основной школы участниками экзамена этих групп превышает 50%. Задания по геометрии участниками обеих групп решаются с меньшей успешностью. Задания курса математики старшей школы успешно решаются на понятийном уровне. Участники экзамена из этих групп

могут претендовать на продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук. Учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих четких мотиваций или испытывающих определенные затруднения, но желающих освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет интерес выделение в базовом уровне подготовки группы III. Следует отметить, что участники из этой группы могут рассчитывать на успешное преодоление аттестационного порога и на профильном уровне.

Группа IV – это в основном абитуриенты нетехнических вузов. Успешность выполнения заданий участниками экзамена из этой группы в основном высокая – более 80%. Значительная часть этой группы – выпускники, которые сдавали экзамен и на базовом, и на профильном уровнях, поэтому в этом году в этой группе оказалось много абитуриентов технических вузов. Участники из этой группы могут рассчитывать на успешную сдачу экзамена профильного уровня на баллы, достаточные для поступления и дальнейшего обучения в технических вузах.

Краткие выводы по итогам анализа результатов ЕГЭ по математике

Базовый ЕГЭ по математике себя оправдал. В 2017 г. он проводится третий раз. За три года снизилась напряженность среди выпускников, поскольку к разным целевым группам участников ЕГЭ предъявляются, по сути, разные требования, лучше соответствующие их действительному или ожидаемому уровню подготовки. Это, в свою очередь, привело к значительному снижению количества попыток списывания или поиска ответов в интернете; к повышению честности экзамена в целом.

Помимо снижения напряженности среди выпускников низкого уровня подготовки, наблюдается повышение учебной мотивации у выпускников среднего и высокого уровней, поскольку на них переложена часть ответственности за результаты своего школьного обучения и продолжение образования.

Вследствие разделения экзамена в 2015 году возникла значительная часть участников, выбирающих оба экзамена, но она постепенно снижается. Это говорит о том, что в среде учащихся растет понимание роли базового и профильного ЕГЭ, развивается способность предъявлять свои индивидуальные требования к уровню собственной математической подготовки.

Результаты профильного экзамена указывают на необходимость дальнейшего развития геометрических заданий, стимулирующих доказательно-логическую линию в школьной математике. Выполнение задач по теории вероятностей и статистике на профильном ЕГЭ за несколько лет выросло до 90%, что дает основание расширить тематику заданий этой линии.

Постепенное общее повышение результатов профильного ЕГЭ позволит перейти к более совершенной модели профильного экзамена с меньшим количеством заданий базового уровня.

Рост результативности базового экзамена является даже более значимым явлением, чем улучшение результатов профильного. Это свидетельствует о выводе значительной части участников экзамена из ситуации, когда к ним предъявлялись заведомо невыполнимые требования. В условиях базового экзамена эти участники получили возможность подготовиться к усиленному для них испытанию. Помимо содержательных изменений в экзамене, существенный вклад в эффективность базовой подготовки вносят современные примерные образовательные программы, формирующие требования на разных уровнях.

В результате совершенствования ЕГЭ и всего комплекса мер изучение математики на базовом уровне в российской школе становится мотивированным, осмысленным и менее формальным.

Рекомендации по совершенствованию преподавания математики с учетом результатов ЕГЭ 2017 г.

В основу построения рекомендаций положены принципы развития математического образования, определение приоритетных и перспективных

направлений, а также анализ наиболее типичных ошибок, допущенных в решении заданий профильного экзамена.

Практика показывает, что прорешивание открытых вариантов ЕГЭ прошлых лет не дает ожидаемого эффекта. Разобрав вариант в классе, учитель дает аналогичный вариант для домашнего разбора. После удачного разбора в классе домашний вариант не представляет большого труда, у обучающегося и учителя складывается ложное впечатление, что подготовка идет эффективно и цель достигнута. Многократное повторение этих манипуляций не улучшает ситуацию. Когда участник на ЕГЭ получает свой вариант, он обнаруживает, что этот вариант он с учителем не решал. Привычка повторять разобранные ранее варианты часто идет во вред обучению.

Правильным подходом является систематическое изучение материала, решение большого количества разнообразных задач по каждой теме – от простых к сложным, изучение отдельных методов решения задач. Разумеется, варианты из подготовительных сборников, открытые варианты прошедших экзаменов можно и нужно использовать, но их решение не должно становиться главной целью; они дают возможность иллюстрировать и отрабатывать методы, проверить степень готовности учащихся, но не являются основным инструментом подготовки к экзамену. В любом случае, при проведении диагностических работ следует подбирать задачи, прямые аналоги которых в классе не разбирались. Только так учитель может составить верное представление об уровне знаний и умений своих учеников.

Компенсирующее обучение в старших классах

Часто мы сталкиваемся с ситуацией, когда главенствующим методическим принципом оказывается принцип «прохождения программы», – т.е. программа должна быть пройдена во что бы то ни стало, несмотря на то, что ее содержание может не отвечать реальным возможностям учащихся.

С введением нового ФГОС, реализацией Концепции развития математического образования, принятием федеральных примерных образовательных программ по математике принцип прохождения программы

приобретает новый смысл: обучающийся должен участвовать в посильной интеллектуальной математической деятельности, дающей осязаемые плоды обучения.

Компенсирующая программа как вариант базовой программы для старших классов дает возможность учителю сделать уроки математики для наименее подготовленных обучающихся осмысленными. При этом появляется реальная возможность эффективно подготовить обучающихся к базовому ЕГЭ или к решению 8–10 заданий профильного ЕГЭ.

Практико-ориентированная математика

Важной частью ЕГЭ по математике и современных программ являются задачи на применение математических знаний в быту, в реальных жизненных ситуациях. Это задачи на проценты, оптимальный выбор из предложенных вариантов, чтение данных, представленных в виде диаграмм, графиков или таблиц, вычисление площадей или других геометрических величин по рисунку, задачи на вычисление по формулам и т.п.

Круг практико-ориентированных задач в ОГЭ и ЕГЭ обоих уровней постоянно расширяется, дополнительно к ним следует отнести задачи вероятностно-статистического блока.

Сложилась практика, когда к практическим задачам учитель приступает только в последний год перед сдачей ЕГЭ. К этому времени обучающиеся успели прочно забыть, как вычислять проценты, как находить площади фигур с помощью палетки или на клетчатой бумаге, – все эти задачи для них оказываются новыми.

На протяжении всего периода обучения математике не следует забывать простые практические задачи; их следует включать в блоки повторения в начале и конце учебного года, в текущий внутришкольный контроль. Задачи на вычисление сумм налогов, процентов по вкладу или кредиту, другие задачи финансового характера должны стать постоянным инструментом на уроках

математики, поскольку эти задачи связывают наш предмет с окружающим миром и повседневной жизнью.

Постепенно удалось изменить ситуацию, когда перевод одних единиц в другие или деление с остатком вызывали затруднения у 60–70% участников ЕГЭ. Сейчас на практическом уровне ситуация существенно улучшилась.

Практико-ориентированные задачи по финансовой грамотности, геометрического плана, чтение таблиц и графиков нужно включать в изучение математики в средней и старшей школе. При этом характер и трудность задач могут меняться со временем; более того, это необходимо для органического сочетания практических тем и теоретических вопросов. Например, задачи на вклады и кредиты органично возникают при изучении прогрессий, показательной функции и производных. Вычисление площадей по клеточкам очень часто помогает при изучении совершенно абстрактной, казалось бы, темы «первообразная и интеграл». Чтение простых графиков помогает понять и грамотно на качественном уровне применять производную.

Отдельную важную роль в сближении школьной математики с задачами окружающего мира играют вопросы вероятностей и статистики.

Теория вероятностей и статистика

В Концепции развития математического образования теория вероятностей и статистика названы в числе перспективных и важных направлений развития школьной математики. С 2012 г. задачи по теории вероятностей формально включаются в КИМ ОГЭ и ЕГЭ. При этом учителя понимают, что те задачи, которые сейчас есть в открытом банке заданий и те, которые включены в экзамен, в большинстве случаев сводятся к перечислению равновозможных исходов.

Ясно, что роль теории вероятностей и статистики в школьной математике будет расти. Одновременно будет расширяться круг тем, подлежащих контролю.

При обучении математике следует больше внимания уделять темам вероятности и статистики, постепенно нарабатывая опыт преподавания этих разделов, которые оказываются наиболее практически направленными. Изучение

вероятности и статистики требуется вести в тесной привязке к темам алгебры и геометрии, поскольку систематический подход к вопросам теории вероятностей требует от обучающихся знаний о свойствах геометрической прогрессии, преобразованиях многочленов, корнях и степенях, площадях фигур. Таким образом, правильно выстроенное преподавание вероятности не отнимает время, а, напротив, поддерживает изучение традиционных разделов школьной математики.

В 2012–2014 г. задачи по теории вероятностей, появившись в экзамене, вызывали большие трудности и выполнение этих заданий редко поднималось выше 50%. В настоящее время ситуация изменилась. На данный момент в базовом экзамене медиана выполнения задания 10 – около 70% по разным вариантам, а в профильном – около 90%.

Выводы

Итоги ЕГЭ 2017 г. выявляют ключевые проблемы, определяющие недостаточное число выпускников с уровнем подготовки, подходящим для успешного продолжения образования в профильных вузах:

- несформированность базовой логической культуры;
- недостаточные геометрические знания, графическая культура;
- неумение проводить анализ условия, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации;
- неразвитость регулятивных умений: находить и исправлять собственные ошибки.

Как видно из проделанного анализа типичных и массовых неверных ответов, самой большой проблемой является неверное понимание, неполное или невнимательное чтение условия. Это относится практически ко всем заданиям практико-ориентированного направления. Наверняка это же верно и в отношении текстовых задач повышенного уровня, но эта ошибка там проявляется не так открыто, как в базовых задачах.

Потеря знака остается массовой ошибкой, на это нужно обращать особое внимание, выявляя «группы риска» – тех учащихся, кто допускает эту ошибку регулярно.

Заметно снизилось количество ошибок, полученных из-за того, что участник экзамена не сопоставляет свой ответ с реально возможными значениями величины. Раньше таких ошибок было намного больше. Возможно, снижение их числа связано с тем, что в базовом ЕГЭ на протяжении трех лет дается задача, назначение которой – проверить ответ на здравый смысл и соответствие реальности. Так или иначе, учителя больше стали обращать внимание на правдоподобность полученных ответов. Здесь уже сыграла свою положительную роль практическая ориентированность многих задач ЕГЭ.

Общая рекомендация при подготовке учащихся к ЕГЭ – следование простым правилам.

1. Для каждого из обучающихся определить задачи, которые он или она решает уверенно (1 тип), задачи, которые решаются хорошо, но часто бывают случайные ошибки (2 тип), и задачи, которые решаются плохо или вовсе не поняты (3 тип).

2. Обратит особое внимание на задачи 2-го типа: занимаясь ими, учащийся не только эффективно готовится к задачам этого типа, но и, незаметно для себя, повышает общую культуру, которая потребуется для решения прочих задач.

3. Доводя до совершенства решение понятных задач, не следует забывать задачи 1-го типа – к ним нужно постоянно возвращаться.

4. Задачи, трудные для обучающегося (3-й тип), следует добавлять в варианты понемногу, следя за тем, чтобы они не стали преобладающими, иначе мотивация может снизиться (ничего не получается), а понятные и привычные задачи забудутся. Лучше, если обучающийся, выполняя свои подготовительные задания, решит почти все сам и уже после этого будет с учителем разбираться в одной-двух непонятных задачах. Это экономит время также и учителю, а школьнику придает уверенности в том, что большинство задач он решить может.

5. Нельзя забывать о том, что подготовка к ЕГЭ может быть успешной только на фоне хорошего общего знания математики. Поэтому, повторим, сводить обучение в последние год-два к прорешиванию вариантов чревато провалом на

ЕГЭ. Подготовка к ЕГЭ, как и ко всякому экзамену, – заключительная часть этапа обучения, а не цель обучения.

Органам управления образования, администрациям образовательных организаций, учителям необходимо усилить разъяснительную работу среди обучающихся и родителей, направляя и поощряя их сознательный выбор требуемого и необходимого уровня математического образования и уровня итоговой аттестации.

На ступени основной и средней (полной) общей школы при организации преподавания математики приобретают еще большую актуальность следующие меры.

1. Выделение направлений математической подготовки:

- математика, необходимая для успешной жизни в современном обществе;
- математика, необходимая для прикладного использования в дальнейшей учебе и профессиональной деятельности;
- математика как подготовка к творческой работе в математике и других научных областях.

2. Для каждого направления необходимо определить меры по реализации содержания образования на базе ФГОС и примерных образовательных программ, в частности актуализированное общедоступными базами учебных и контрольных заданий.

3. Требуется дальнейшее увеличение доли геометрии, статистики, теории вероятностей и логики в преподавании математики.

4. Для эффективной реализации программы уровневого обучения необходим мониторинг индивидуальных учебных траекторий школьников начиная с первого года обучения.

5. Необходимо внедрение механизмов компенсирующего математического образования как в виде очных занятий, так и через сеть интернет-курсов, позволяющих своевременно ликвидировать пробелы, незнание.

6. Необходимо внедрение эффективных механизмов текущего и рубежного контроля – на школьном, региональном и федеральном уровнях.

7. Для учащихся, достигших базового уровня и не претендующих на достижение профильного уровня и выполнение экзаменационной работы профильного уровня, на ступени старшей школы должна быть предусмотрена возможность развивающего обучения математике.

8. Для учащихся, не достигших базового уровня математической подготовки к окончанию основной школы, дальнейшее математическое образование на старшей ступени средней школы должно проводиться по специально разработанным интенсивным программам, направленным на освоение базовых математических умений и позволяющим подготовиться к итоговой аттестации на базовом уровне. Система внутреннего промежуточного контроля и итоговой аттестации по математике должна быть нацелена не на оценку абсолютной подготовки учащегося, а на оценку результата освоения математики учащимся с учетом выбранного направления математической подготовки.

9. Необходимо заменить «принцип прохождения программы» качественным усвоением знаний и умений на выбранном ими направлении подготовки.

10. Для организации повторения необходимо использовать для работы на уроке комплекты материалов для подготовки учащихся к итоговой аттестации.

*Рекомендации по работе с учащимися, планирующими выполнение
экзаменационной работы на профильном уровне*

Для учащихся, которые могут успешно освоить курс математики средней (полной) школы на базовом уровне, образовательный акцент должен быть сделан на полное изучение традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на базовом уровне. Помимо заданий базового уровня, в образовательном процессе должны использоваться задания повышенного уровня. Количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для учащихся, которые могут успешно освоить курс математики полной (средней) школы на профильном (повышенном) уровне, образовательный акцент

должен быть сделан на полное изучение традиционных курсов алгебры и начал анализа и геометрии на профильном уровне. Количество часов математики должно быть не менее 6–7 часов в неделю.

В первую очередь нужно выработать у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий части 1, используя в том числе открытый банк заданий экзамена базового уровня. Умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня, должны быть под постоянным контролем.

Задания с кратким ответом (повышенного уровня) части 2 должны находить отражение в содержании математического образования, и аналогичные задания должны включаться в систему текущего и рубежного контроля.

В записи решений к заданиям с развернутым ответом нужно особое внимание обращать на построение чертежей и рисунков, лаконичность пояснений, доказательность рассуждений.

*Рекомендации по работе с учащимися, планирующими выполнение
экзаменационной работы на базовом уровне*

Для учащихся, слабо овладевших или фактически не овладевших математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающих значительное количество ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи, образовательный акцент должен быть сделан на формировании базовых математических компетентностей. В этой группе учебный материал старшей школы может изучаться обзорно. Дополнительно потребуются не менее 2–3 часов в неделю для ликвидации проблем в базовых предметных компетенциях. Общее количество часов математики должно быть не менее 5 часов в неделю.

Для подготовки к ЕГЭ учащиеся этой категории следует различными диагностическими процедурами выявить 9–12 заданий экзамена базового уровня, которые учащийся может выполнить, возможно, с ошибками, и в процессе обучения добиться уверенного выполнения этих заданий. Расширять круг этих заданий следует поэтапно.

Эта работа может быть организована для различных групп учащихся одного класса на разных уровнях в урочной и внеурочной работе.

В обучении учащихся, имеющих значительные пробелы в знаниях и слабые вычислительные навыки, программа обучения должна быть компенсирующей.

Для учащихся, которые имеют достаточно высокий уровень подготовки, но не планируют сдачу экзамена профильного уровня, при подготовке к экзамену базового уровня следует делать больший акцент на решение задач 18–20 в целях развития математического мышления, а также уделять внимание формированию представления об общекультурной роли математики, развитию наглядных геометрических представлений.

Следует обратить особое внимание на выбор уровня экзамена, рекомендуя учащимся, которые неуверенно решают 6 заданий с кратким ответом, базовый экзамен вместо профильного, а тем, кто решает 6–10 заданий, – базовый экзамен наряду с профильным.

При подготовке к профильному экзамену следует обратить дополнительное внимание на задания с полным решением. В частности учащимся с не очень высоким уровнем подготовки, следует обратить особое внимание на задание 13, и первые пункты заданий 14, 16 и 19.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что главной основой успешной сдачи экзамена по математике является качественное системное изучение математики, отсутствие пробелов в базовых математических знаниях.

Изменений в структуре КИМ ЕГЭ базового и профильного уровней в 2018 г. не планируется.

Следует помнить, что, как отмечено на сайте ФИПИ, «При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2018 г. следует иметь в виду, что задания, включенные в него, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2018 г. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2018 г., приведен в кодификаторе элементов

содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2018 г. по математике».