ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ФИПИ

И.В. Ященко, А.В. Семенов, И.Р. Высоцкий

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО НЕКОТОРЫМ АСПЕКТАМ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ **МАТЕМАТИКИ**

(*на основе анализа типичных затруднений выпускников при выполнении заданий ЕГЭ*)

Москва, 2013

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике. Варианты КИМ составлялись на основе кодификаторов элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2013 г. ЕГЭ по математике.

В основной волне ЕГЭ по математике в июне 2013 г. принял участие 830161 человек.

В КИМ ЕГЭ по математике в 2013 г. соблюдена преемственность с КИМ 2012 г. Имеется незначительное расширение тематики контролируемых элементов содержания, отраженное в Спецификации и Демоверсии экзамена и соответствующие действующему стандарту ФГОС по математике общего образования.

КИМ ЕГЭ по математике состоит из двух частей. Задания первой части В1 – В14 с кратким ответом, задания второй части С1 – С6 подразумевают полный развернутый ответ участника экзамена. Задания первой части можно разделить на три группы – задания по алгебре, по геометрии, а также практико-ориентированные задачи, сюжеты которых предполагают применение математических знаний и математической культуры в повседневных ситуациях и расчетах, таких как выбор оптимального тарифного плана, оценка скидок и наценок при покупке товаров, расчет шансов в простейших вероятностных ситуациях и т.п.

Для участников экзамена, заинтересованных лишь в преодолении порогового балла (5 первичных или 24 тестовых) и получении аттестата о среднем (полном) общем образовании, предназначены задания В1–В5, В10, В13, направленные на:

- выявление и оценку уровня развития общекультурных и коммуникативных математических навыков, необходимых человеку в современном обществе;
- проверку адекватности восприятия текста практико-ориентированных задач;
- проверку базовых вычислительных и логических умений и навыков;
- оценку умения считывать и анализировать графическую и табличную информацию;
- оценку способности ориентироваться в простых наглядных геометрических конструкциях.

Для участников экзамена, планирующих использовать результаты ЕГЭ по математике при поступлении в ссузы и вузы, предназначены задания В7–В14, С1–С6, требующие математических знаний и направленные на ранжирование абитуриентов по уровню математической подготовки с учетом требований различных групп вузов. В указанных заданиях сделан акцент на:

- проверку владения алгебраическим аппаратом;
- проверку освоения базовых идей математического анализа;
- проверку умения логически грамотно излагать свои аргументы;
- оценку сформированности геометрических представлений, умения анализировать геометрическую конструкцию;
- оценку умения найти решение задачи повышенного и высокого уровня сложности.

Перевод первичных баллов в тестовые баллы проводился по шкале, представленной в таблице 1. Шкала перевода не отличается от шкалы перевода 2012 г.

Таблица 1. Шкала перевода первичных баллов в тестовые

Первичный балл	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	0	5	10	15	20	24	28	32	36	40	44

Первичный балл	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	48	52	56	60	63	66	68	70	72	74	77

Первичный балл	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	79	81	83	85	87	90	92	94	96	98	100

Третий год шкала перевода первичных баллов в тестовые строится на основе узловых точек, определенных в ходе исследования, проведенного ФИПИ в сотрудничестве с рядом вузов. В ходе исследования был экспертным методом определен пороговый балл ЕГЭ (ПБ1), а также средний балл успешного абитуриента технического вуза (ПБ2), а также соответствующие этим баллам тестовые баллы ТБ1 и ТБ2 в стобалльной шкале. Шкалирование осуществлялось кусочно-линейным методом с округлением до ближайшего целого и использованием маргинальных узловых точек 0–0 и 32–100. Эта методика хорошо зарекомендовала себя в 2011–2012 гг., обеспечив прозрачность ожидаемых результатов за счет своевременного информирования участников экзамена и их родителей о требуемых уровнях подготовки. В 2013 г. методика подтвердила свою эффективность. Опыт 2012 г. показал, что применяемая шкала и отвечает большинству поставленных задач. В этой связи изменений в 2013 г. шкалирование не претерпело. В 2013 г. минимальный балл ПБ1=5, ТБ1=24, ПБ2 = 15, ТБ2 = 63. Это соответствует баллам за выполнение всех заданий базового уровня (часть 1) и хотя бы одного задания повышенного или высокого уровня (часть 2).

Анализ данных о результатах выполнения заданий ЕГЭ 2013 г. по математике показывает, что использованные КИМ в целом соответствуют целям и задачам проведения экзамена, позволяют дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики на базовом и профильном уровне.

Комплексный анализ результатов образования, включая анализ результатов ЕГЭ последних лет, показывает, что в преподавании математики в Российской Федерации накопился ряд противоречий между интересами различных групп выпускников, родителей, руководителей образовательных учреждений и государственными интересами в сфере образования. Нерешенные проблемы не позволяют повысить эффективность преподавания и изучения математики, а имеющаяся во многих регионах склонность к завышению результатов приводит к маскировке противоречий. Накопленные проблемы можно условно разделить на три группы.

Мотивационные проблемы. Низкая мотивация учащихся и студентов к приобретению математических знаний связана с общественной недооценкой значимости математического образования. Причина – учебные программы не учитывают запросы и способности каждой личности, слабо связаны с задачами профессиональной подготовки. Другая причина низкой мотивации – перегруженность школьной математики техническими элементами. У многих учащихся с 6 класса вырабатывается негативное отношение к математике как к непонятному и ненужному предмету, который невозможно освоить. Проблема усугубляется тем, что негативным отношением к математике проникнуто два-три поколения, поэтому в значительной части семей родители не могут поддержать учебную мотивацию учащихся. Третья причина низкой мотивации – отсутствие в современной российской школе

Важным фактором, повлиявшим на падение учебной мотивации в последние 30 лет, является избыточная уравнительная ответственность, взятая на себя государством за процесс и результаты образовательной деятельности по отношению ко всем учащимся. Результат – падение учебной конкуренции, формирование потребительского отношения к школе и отсутствие ответственности учащихся за результаты своего образования.

Мотивационные проблемы не исчезают с переходом в вуз: большинство российских вузов не формирует у студентов современные научные взгляды, не побуждает к исследованиям; карьера инженера, ученого и преподавателя непривлекательна.

Избыточное единство требований к результатам образования. Традиционно наше математическое образование единообразно и маловариативно. Это привело к перегрузке школ, учащихся и учителей и на фоне падения учебной мотивации – к низкой эффективности учебного процесса. Единые требования к результатам обучения нереалистичны для значительной части учащихся. В условиях, когда от образовательных учреждений требуется стопроцентная успеваемость, результаты обучения завышаются с целью показать формальное выполнение универсальных требований. Это приводит к нетерпимому явлению – нечестности образования. В то же время способные учащиеся интеллектуально недогружены, уровень их итоговой подготовки ниже, чем должен быть.

Проблема усугубляются тем, что сейчас значительная часть учащихся старших классов предъявляет к своему образованию все больше утилитарных требований, определяет круг предметов повышенного внимания, а также предметы, «ненужные» с точки зрения дальнейшей учебы. Возникают противоречия в учебных интересах учащихся одного класса, где учитель не в состоянии удовлетворить принципиально разные запросы, руководствуясь общим для всех образовательным стандартом и программами.

Содержательные проблемы и неэффективность. Третья группа проблем связана с моральным старением стандартных математических курсов средней и высшей школы. Курсы линейны, отсутствуют механизмы уровневой дифференциации, корректировки знаний. Другой недостаток – отсутствие связи обучения с потребностями государства и общества в будущих специалистов в специфических математических знаниях и методах.

В школе и в большинстве вузов образовательные программы почти не менялись десятилетиями и не учитывают современные потребности, математика преподается формально, без определенной цели, без контроля степени усвоения.

В погоне за необъятным и необоснованным содержанием курса математики учителя не могут обеспечить усвоение даже базовых математических компетенций значительной частью учащихся. В качестве иллюстрации приведем пример из прошедшего экзамена. Задачу В1 на расчет платы за электричество верно выполнили 78% участников экзамена, а задачу В5 (показательное или логарифмическое уравнение) верно решили 86% экзаменуемых. Точно так же задачу на поиск наибольшего значения функции с помощью производной выпускники решают лучше (53%), чем наглядную задачу по геометрии (49%). В этом перекосе проявляется общая системная проблема – в условиях общности и единства образовательных программ учителя отрабатывают и заучивают алгоритмы решения стандартных задач вместо анализа простых математических моделей жизненных ситуаций.

К окончанию 9 класса значительная часть учащихся (по разным оценкам от 20 до 40%) остается на уровне 5 – 7 классов. Например, в ГИА 2013 г. только 16% участников выполнили задачу на простейшее геометрическое доказательство. От 30 до 50% (в разных регионах) выпускников основной школы (9 класс) не готовы к дальнейшему обучению. Перейдя в старшую школу, они не занимаются математикой, поскольку не имеют ни необходимого фундамента, ни мотивации. Учащиеся, осознающие необходимость математических знаний для поступления в вуз и дальнейшего образования, часто вынуждены прибегать к услугам репетиторов. Доверие к школьному математическому образованию упало ниже критического уровня.

При поступлении в высшие учебные заведения сложилась парадоксальная ситуация, когда количество мест в технических вузах крупных городов значительно превышает количество абитуриентов, имеющих достаточный интеллектуальный потенциал и мотивацию. В результате первые курсы наполовину формируются из выпускников школ, не освоивших школьную программу по математике. Последние годы вузы, заинтересованные в качестве подготовки студентов, вынуждены открывать дополнительные курсы по элементарной школьной математике 8 – 11 классов. Эта мера помогает слабо, поскольку первокурсники, привыкшие к школьной практике натягивания и приписывания отметок, не готовы серьезно учиться.

Ключевой проблемой качества школьного математического образования остается неэффективность использования учебных часов. Школьная администрация и учителя не имеют ни оснований, ни практической возможности заниматься уровневой дифференциацией учащихся, выстраиванием групповых учебных траекторий и программ. В результате учитель на уроке работает в интересах «прохождения программы», а не в интересах математического образование. Простое увеличение числа учебных часов, выделенных на математику, не решит ни содержательные, ни мотивационные проблемы. При разработке учебников и учебных программ под новый ФГОС необходимо учитывать различия в целях образования различных групп учащихся.

Перечисленные явления приводят к тому, что обучаясь по общим программам, одни школьники не раскрывают свой учебный потенциал, а большая часть выпускников не готова к дальнейшему изучению математики в вузах. В результате в обществе сформировалось мнение, что значительная часть школьников и студентов не способна к усвоению математики. Реализация образовательных программ по математике, а также единый государственный экзамен проходит в атмосфере общей недоброжелательности. Подчеркнем, что перечисленные проблемы являются проблемами не собственно ЕГЭ, а всей системы преподавания математики в школе; ЕГЭ по математике лишь обостряет эти проблемы, вызывая бурные общественные дискуссии.

Модель современного ЕГЭ по математике была принята в 2010 г. Основная черта этой модели – попытка объединить в одном экзаменационном материале задания, отражающие требования к трем различным категориям участников экзамена. КИМ по математике содержат как задания по программе основной школы, так и задания, относящиеся к старшей школе. Такое деление неявно, все задания расположены единым блоком, что отражает устаревший принцип единства школьных программ и аттестации по математике. Увеличение количества заданий ЕГЭ невозможно в силу ограниченности отведенного на экзамен времени. Изменение структуры ЕГЭ неизбежно приводит к потере значимости экзамена для значительной части выпускников. Таким образом, изменение формы и структуры ЕГЭ по математике в настоящий момент невозможно без изменения структуры и целей преподавания и изучения математики в средней школе. Интерес представляет сравнение результатов выполнения двух групп заданий ЕГЭ по математике - заданий, относящихся к основной школе и заданий, относящихся к старшей школе.

Интерес представляет вопрос, какой вклад дают разные задания в результат участников экзамена в зависимости от уровня подготовки участника. По результатам выполнения работы участники экзамена разделяются на пять группы, в соответствии с уровнем подготовки.

Таблица 2. Группы выпускников с различным уровнем подготовки

Номер группы	**Первичный балл**	**Тестовый балл**	**Уровень подготовки**	**Процент участников (2013/12 гг)**
I (низкий)	0 – 5	0 – 24	Участники, не преодолевшие порог в 5 первичных баллов или набравшие ровно 5 первичных баллов	18,5/13,9
II (базовый)	6 – 10	28 –44	Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям	37,5/39,2
III (базовый)	11 – 14	48 – 60	Выпускники, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие реальные шансы при наличии мотивации на переход в следующую группу по уровню подготовки. Эти участники экзамена фактически могут быть зачислены в 2012 г. на технические специальности большинства вузов	27,0/30,8
IV (повышенный)	15 –23	63 – 81	Выпускники, успешно освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенного и высокого уровней математической компетентности	15,3/15,3
V (высокий)	24 –32	83 –100	Выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к уровню математической компетентности	1,8/0,7

<u>В группу I</u> попадают экзаменуемые, не набравшие минимального балла по ЕГЭ и выпускники, формально преодолевшие этот рубеж, но фактически не овладевшие математическими компетенциями, требуемыми в повседневной жизни, и допускающие значительное число ошибок

в вычислениях, при чтении условия задачи. В этом году около 18,5% участников попали в эту группу. Указанный процент примерно равен экспертной оценке (20% неуспевающих в X-XI классах).

Группы II и III наиболее массовые, в них входят участники экзамена, успешно освоившие курс математики полной (средней) школы на базовом уровне, но зачастую не имеющие мотивации для более углубленного изучения математики. В частности, выпускники, планирующие продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук, обычно распределяют свои усилия соответствующим образом. Однако с учетом задач, стоящих перед страной, учителям следует обратить большее внимание на эту группу в целях выделения учащихся, не имеющих четких мотиваций или испытывающих определенные затруднения, которые хотели бы освоить математику на более высоком уровне. Поэтому представляет некоторый интерес выделение в указанной группе подгруппы III «ближайшего резерва».

Группа IV – это в основном абитуриенты технических вузов. Отметим, что их число меньше количества бюджетных мест по техническим специальностям. Фактически, в последние годы на технические специальности, а также на специальность «учитель математики» зачислялись учащиеся из группы «базовый-2».

Группа V – это контингент физико-математических специальностей ведущих университетов и технических вузов, а также престижных экономических вузов. Состав этой группы во многом формируется выпускниками специализированных математических школ и классов, осуществляющих традиционно высокий уровень преподавания. Количество часов математики обычно не менее 8. Количественный состав группы в целом соответствует запросам вузов в настоящий момент. Однако распределение участников этой группы крайне неравномерно, что связано не только с наличием или отсутствие специализированных школ в регионе, но и с особенностями работы органов управления образованием, которые часто не уделяют внимания одаренным учащимся. Требуется развитие системы работы с одаренными детьми в области математики, особенно в сельской местности, расширение сети математических школ и классов, в том числе и интернатного типа, целевая поддержка педагогов, работающих с одаренными детьми, развитие дистанционных форм работы и нормативной базы для такой работы.

Результаты экзамена показывают, что выпускники с повышенным и высоким уровнями подготовки освоили все базовые требования, проверяемые заданиями первой части, и их ошибки в выполнении заданий не превосходят естественного случайного фона. Данный вывод подтверждается высокими результатами выпускников этих групп и небольшими колебаниями результатов по отдельным заданиям.

Результаты выпускников с базовым уровнем подготовки неоднородны. Это видно после разделения базовой группы на две подгруппы II и III – отношение результатов по разным заданиям значительно колеблется.

Обращает на себя внимание значительная разница в результатах подгрупп II и III базового уровня по заданиям В7 (тригонометрические преобразования), В8 (понятие о производной), В9, В11–В14. Все эти задания, кроме одного-двух, соответствуют материалу 10 – 11 классов. Таким образом, подгруппа II усваивает материал курса математики старшей школы значительно хуже, чем подгруппа III. Задание В13 требует составления математической модели по данным текстовой задачи и здесь сильно сказывается разница в общей математической культуре между подгруппами.

В экзамене присутствует алгоритмическое задание В12; оно проверяет компетенцию в области выполнения предложенных, но не заученных алгоритмов. И здесь подгруппа II показывает значительно более низкий результат 28,0 % против 74,4% у подгруппы III.

Все указанные особенности имели место и в 2012 году. Таким образом, нельзя сказать, что качественно картина изменилась.

Среди участников ЕГЭ по математике с низким уровнем подготовки характерно разделение между относительно высокими показателями в заданиях В1–В5 и В10 и низкими показателями выполнения прочих заданий. Экзаменуемые этой группы смогли набрать хоть сколько-нибудь существенные баллы лишь за выполнение практико-ориентированных заданий, простейшего алгебраического задания B5, простейшего геометрического задания B3 и элементарной задачей по теории вероятностей, т. е. фактически учащиеся этой группы имеют существенные пробелы даже в знании материала основной школы. Можно с уверенностью сказать, что при сдаче ГИА для выпускников IX классов по математике, эти выпускники получили бы неудовлетворительную отметку. Поэтому трудно ожидать успешного освоения ими материала старшей школы.

Данные показывают, что практически все участники с повышенным и высоким уровнями подготовки (IV – V) получили баллы за выполнение задания C1 (89,0% и 97,0% соответственно), в то время как для групп с базовой подготовкой этот показатель – 20,0%. Это подтверждает то, что задание C1, аналогичное типичным заданиям на первых позициях вступительных экзаменов технических вузов, характеризует готовность участников ЕГЭ по математике к продолжению образования в технических и экономических вузах.

Характер выполнения следующего задания C2 (стереометрия) дифференцирует выпускников групп IV и V: ненулевой балл достигли 40,7% и 94,2% участников соответственно.

Показателен факт, что задание C3 (система неравенств) по сравнению с геометрическим заданием C2 решали большее число участников с повышенным уровнем подготовки и положительные результаты получили большее число экзаменуемых этой группы (40,7% по C2 и 50,4% по C3). Для группы V эти показатели равны 94,2% и 96,9%. Следовательно, даже для выпускников с повышенным и высоким уровнем подготовки алгебраическая составляющая школьного курса математики доминирует над геометрической. Аналогичная ситуация наблюдалась и в прошлые годы.

В этом году в группе экзаменуемых с базовой подготовкой задания C2 и C3 сработали одинаково – доли участников этой группы, получивших ненулевой балл за эти задания равны. В ней 1,5% получили 1 или 2 балла за выполнение задания C2 и 3,6% – за C3. Доминирование алгебры над геометрией проявляется у подавляющего большинства участников ЕГЭ.

Наиболее значимая дифференциация участников с высоким уровнем математической подготовки происходит при выполнении заданий C4–C6.

Сравним результаты участников разных групп при выполнении заданий основной школы и старшей школы. Сравнение построим таким образом, чтобы видеть вклад группы заданий в общее число баллов, полученное участниками группы[1]. Этот показатель должен учитывать количество заданий в группе. К заданиям основной школы относятся задания B1 – B4, B6, B10, B13, C4 и C6. Остальные задания относятся к темам, изучаемым в 10 -11 классах.

Таблица 3. Приведенный вклад заданий основной и старшей школы в общий балл участников по группам

<table>
<tr><th colspan="2">Группа</th><th>Основная школа</th><th>Старшая школа</th></tr>
<tr><td colspan="2">I</td><td>80%</td><td>20%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Базовый</td><td>II</td><td>67%</td><td>33%</td></tr>
<tr><td>III</td><td>57%</td><td>42%</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV</td><td>53%</td><td>48%</td></tr>
<tr><td colspan="2">V</td><td>51%</td><td>49%</td></tr>
</table>

Чем более подготовлена группа, тем ближе показатели друг к другу. У наиболее слабой группы подавляющий вклад приносят задания основной школы. Результаты подтверждают тезис о том, что значительная часть выпускников не овладевает материалом старшей школы.

Проведем аналогичное сравнение групп заданий по алгебре, геометрии, началам анализа и практико-ориентированных заданий. Показатели здесь построены так же[2]

[1] Показатели составлены таким образом, что у участников, верно решивших все задания, показатели вкладов по 50%. Результаты 80% и 20% у I группы следует понимать: если бы в аналогичном задания основной и старшей школы приносили одинаковое максимальное число баллов, то на 4 балла, полученных за задания основной школы, у этой группы приходился бы 1 балл, полученный за задания старшей школы.

[2] У участников, верно решивших все задания, показатели вкладов по 25%. Показатели также учитывают максимальное суммарное количество баллов в каждой группе.

Таблица 4. Приведенный вклад заданий основной и старшей школы в общий балл участников по группам

Группа		Алгебра	Геометрия	Начала анализа	Практ.-ориент.
I		6.0%	13.8%	11.8%	68.3%
Базовый	II	8.0%	18.9%	21.6%	51.5%
	III	8.8%	18.0%	31.5%	41.8%
IV		11.0%	19.1%	33.2%	36.7%
V		13.6%	21.7%	31.7%	32.9%

Видно, что самая слабая группа получает свои баллы в основном за счет заданий практико-ориентированного цикла. Интересно то, что вклад геометрии в балл этой группы несколько выше, чем вклад алгебры и анализа. Это объясняется наличием наглядных заданий по геометрии, которые можно выполнить, опираясь лишь на картинку и здравый смысл. В группах II-V наглядная геометрия также играет большую роль, но взвешенный вклад заданий по анализу (а их всего 2 на весь экзамен) оказывается выше.

У наиболее подготовленной группы задания по алгебре проигрывают заданиям по анализу и практико-ориентированным задачам, хотя роль последних закономерно снижается, а роль задач по алгебре и анализу закономерно растет с ростом подготовки. Интересно, что в этом году вклад заданий по геометрии незначительно колеблется от группы к группе.

Проведенный анализ лишний раз убеждает в том, что при разработке программ и учебников под новый образовательный стандарт следует исходить из необходимости существенной перестройки содержания школьной математики, причем эта перестройка должна учитывать индивидуальные образовательные запросы и возможности различных целевых групп учащихся.

Математическое образование в школе, деятельность учителей и организаторов образования должны исходить из того, что каждый учащий должен получать математические знания в соответствии с его способностями, достаточные для успешной жизни в обществе. Другой задаче школы является подготовка выпускников, обладающих математическими компетенциями, достаточными для применения математики в технике и социально-экономических областях. Третья задача школы: обеспечить каждого школьника развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя в обучении присущую математике красоту и увлекательность.

Содержание математического образования в школе должно конкретизироваться наборами актуальных задач. Содержание и методика преподавания должны учитывать и активно использовать связь познавательной деятельности учащихся с современной информационной средой.

Необходимо сохранять лучшие традиции российского математического образования и учительства, которые предписывают найти и раскрыть потенциал каждого учащегося, никогда не оставляя попыток разбудить в учащемся любопытство и вкус к знаниям.

Главной назревшей необходимостью является переход на разноуровневое математическое образование, когда школьнику фактически предоставляется возможность выбора того уровня математических знаний, который потребуется ему в дальнейшей учебной деятельности и в жизни. Уровневый подход к образованию экономит силы и средства, а также способен вернуть в российскую школу учебную конкуренцию и реалистичность поставленных учебных целей.

На ступени основной и средней (полной) общей школы при организации преподавания математики и в методике ее преподавания назрели следующие меры:

1. Выделение трех уровней математической подготовки школьников
   - Первый уровень, необходимый для успешной жизни в современном обществе;
   - Второй уровень, необходимый для прикладного использования математики в дальнейшей учебе и профессиональной деятельности;
   - Третий уровень - подготовка к творческой работе в математике и смежных научных областях.

2. Для каждого уровня необходимо сформулировать примерное содержание математического образования в виде общедоступных баз учебных и контрольных заданий.

3. Нужна согласованность формулировок основных математических утверждений, определений и терминов в учебниках и учебных пособиях по математике

4. В школе должен быть увеличен вес геометрии, анализа данных, статистики и логики.

5. Для эффективной реализации программы уровневого обучения необходима мониторинг индивидуальных учебных траекторий школьников начиная с первого года обучения.

6. Необходимы механизмы компенсирующего математического образования в виде поддержки школьников во внеурочное время, как в виде очных занятий, так и через сеть интернет-курсов, позволяющие своевременно ликвидировать пробелы, незнание.

7. Нужен отказ от дедуктивного построения общих школьных программ по математике. Дедуктивный курс математики может лежать в основе обучения на высоком уровне.

8. Для учащихся, достигших базового уровня и не претендующих на достижение повышенного уровня, на ступени старшей школы должна быть предусмотрена возможность развивающего общекультурного обучения математике.

9. Для учащихся, не достигших базового уровня математической подготовки к окончанию основной школы, дальнейшее математическое образование на старшей ступени средней школы должно проводиться по компенсирующим программам, позволяющим подготовиться к выполнению сертификационных испытаний.

10. Система внутреннего контроля и итоговой аттестации по математике должны быть нацелены не на оценку абсолютной подготовку учащегося, а на оценку результата освоения математики учащимся на выбранном уровне математической подготовки.

11. Вступительные требования к математической подготовке абитуриентов вузов должны быть приведены в соответствие с уровневой системой школьного математического образования.

12. Никакое изменение содержания математического образования не должно сопровождаться сокращением объема интеллектуальной деятельности.

13. Необходимо усиление роли творческих заданий в образовательном процессе на каждом образовательном уровне.

14. Необходимо уйти от принципа «прохождения программы», добиваясь качественного усвоения знаний и умений на выбранном уровне подготовки.

Решение, статистика и методический анализ выполнения заданий по ряду вариантов ЕГЭ 2013 года

В данном разделе приведены задания ЕГЭ с указанием доли типичных ошибок, выявленных с помощью анализа неверных ответов. Показаны не все, но значительная часть заданий экзамена.

Задача B1

Вариант 1.

Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Ответ: 3.

Верный ответ дали 83,97% выполнявших этот вариант.

Массовые неверные ответы: 2 – 18% (здесь и далее указан процент от общего числа ошибочных ответов);

4 – 15%

Не дали ответа 1,39%.

Вариант 2.
В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 122 куб. м воды, а 1 октября — 142 куб. м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 198.

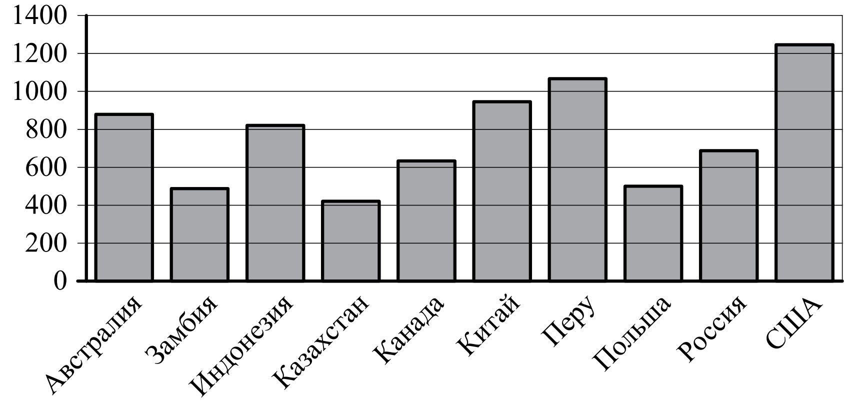
Верный ответ дали 88,92% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 1207,8 – 19% (вероятно, показание счётчика на 1 сентября умножили на цену 1 куб. м);
1405,8 – 9% (вероятно, показания счётчика на 1 октября умножили на цену 1 куб. м).
Не дали ответа 0,27%.

При выполнении задачи B1 допущены ошибки, из которых самыми массовыми являются:
- неполное решение задачи (в ответ записывали промежуточный результат);
- вычислительные ошибки.

Отметим, что ряд ошибок мог бы быть замечен и исправлен, если бы участники экзамена сопоставили свой результат с реальностью.

Задача B2

Вариант 1.
На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?



Ответ: 7.

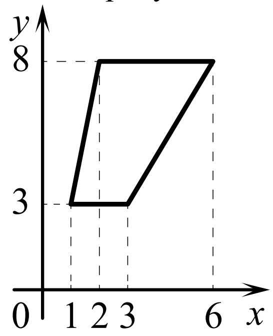
Верный ответ дали 96,14% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 6 – 49% (предположительно, начали отсчёт с Перу),
4 – 20% (предположительно, начали отсчёт с конца).
Не дали ответа 0,24%.

При выполнении задачи B2 допущены ошибки, из которых самыми массовыми являются:
- неполное чтение условия задачи (указание объема и отсчёт с конца);
- отсчёт начинается со второго места.

Задача В3

Вариант 1.

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: 15.

Верный ответ дали 85,10% выполнявших этот вариант.

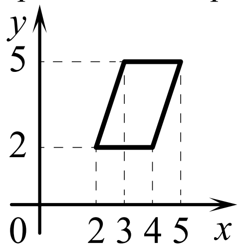
Массовые неверные ответы: 17,5 – 25% (возможно, ошибка в нахождении длины нижнего основания);

20 – 14% (возможно, ошибка в нахождении оснований).

Не дали ответа 1,13%.

Вариант 3.

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: 6.

Верный ответ дали 87,34% выполнявших этот вариант.

Массовые неверные ответы: 3 – 17% (вероятно, ошибка в формуле площади);

10 – 10% (вероятно, ошибка в нахождении высоты параллелограмма).

Не дали ответа 1,54%.

При выполнении задачи В3 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- ошибочное вычисление длины отрезка по координатам концов отрезка;
- использование неверной формула площади фигуры.

Задача В4

Вариант 1.

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

Ответ: 14.

Верный ответ дали 86,99% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 11 – 13% (предположительно, рейтинг модели Б);
22 – 6% (предположительно, ошибка в вычислении).
Не дали ответа 2,21%.

Вариант 3.
Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 20% на звонки в другие регионы, либо скидку 15% на услуги мобильного интернета.
Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 310 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 415 рублей на звонки в другие регионы и 560 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объёме?

Ответ: 93.

Верный ответ дали 76,34% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 83 – 13% (выбор, видимо, пал на звонки абонентам других регионов);
1192 – 10% (это, видимо, сумма оплаты всех услуг с выгодной скидкой).
Не дали ответа 2,64%.

При выполнении задачи В4 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные (особенно вычисление процентов);
- неверная трактовка условия.

Задача В5

Вариант 2.
Найдите корень уравнения $5^{9+x} = 125$.

Ответ: – 6.

Верный ответ дали 92,52% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 6 – 26% (вероятно, не справились с переносом числа из одной части уравнения в другую);
16 – 10% (вероятно, ошибка в представлении числа 125 как 5^{25}).
Не дали ответа 0,84%.

Вариант 4.
Найдите корень уравнения $\log_2(12-4x)=5$.

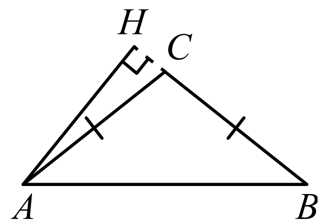
Ответ: – 5.

Верный ответ дали 77,91% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 5 – 19% (видимо, не справились со знаками или уверены, что в логарифмическом уравнении корни могут быть только положительными);
–3,25 – 12% (видимо, ошибка при переходе от логарифмического уравнения к линейному).
Не дали ответа 2,62%.

При выполнении задачи В5 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:
- вычислительные;
- неверное решение линейного уравнения;
- незнание определения логарифма;
- неверное решение логарифмического уравнения;
- неверное представление числа в виде степени;
- неверное решение показательного уравнения.

Задача В6

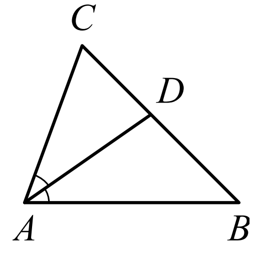
Вариант 1.
В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=20$, высота AH равна 8. Найдите синус угла BAC.



Ответ: 0,4.

Верный ответ дали 78,09% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 0,5 – 22% (вероятно, надежда на хороший ответ в предположении, что угол при основании равен $30°$);
0,8 – 8% (вероятно, при вычислении синуса взята половина основания).
Не дали ответа 6,01%.

Вариант 4.
В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен $62°$, угол CAD равен $32°$. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 54.

Верный ответ дали 76,36% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 86 – 12% (видимо, посчитали, что угол *А* равен $32°$);
52 – 10% (видимо, вычислительная ошибка).
Не дали ответа 3,00%.

При выполнении задачи В6 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:
- отсутствие видения геометрической конструкции;
- незнание свойств равнобедренного треугольника;
- незнание определений тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника;
- вычислительные.

Задача В7

Вариант 1.

Найдите значение выражения $\log_2 240 - \log_2 3,75$.

Ответ: 6.

Верный ответ дали 76,65% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 8 – 25% (предположительно, ошибка в определении логарифма);
64 – 22% (предположительно, не вычислен логарифм числа).
Не дали ответа 3,70%.

Вариант 4.

Найдите $\operatorname{tg}\text{б}$, если $\cos\text{б} = \dfrac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\text{б} \in \left(\dfrac{3\text{р}}{2}; 2\text{р}\right)$.

Ответ: – 0,4.

Верный ответ дали 40,98% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 0,4 – 42% (вероятно, не обратили внимания на область допустимых значений);
1 – 5% (вероятно, попытка угадать ответ).
Не дали ответа 18,20%.

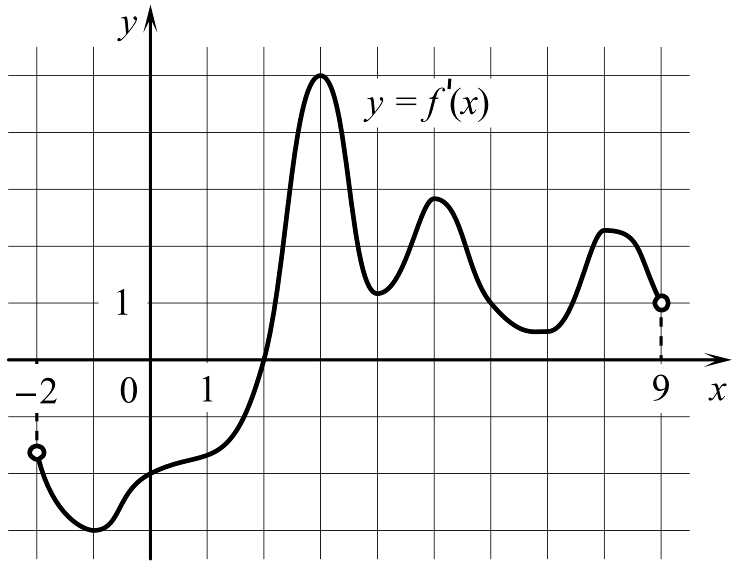
При выполнении задачи В7 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- незнание логарифмов;
- незнание свойств логарифмов;
- незнание соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же угла;
- незнание знаков тригонометрических функций углов, принадлежащих определенным четвертям;
- арифметические ошибки.

Задача В8

Вариант 2.

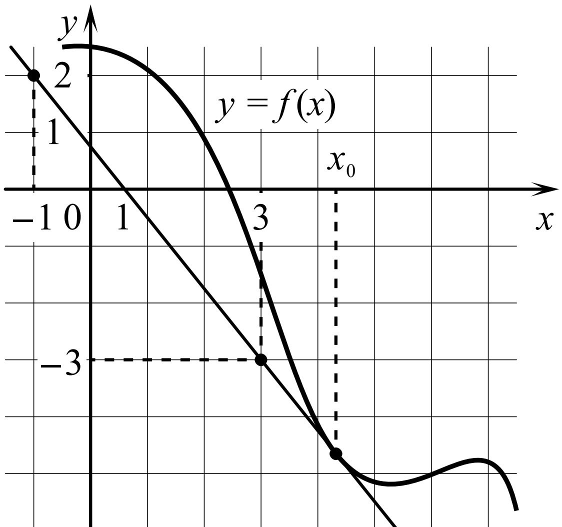
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: 2.

Верный ответ дали 74,28% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 7 – 47% (видимо, количество точек экстремума производной); 3 – 11% (видимо, абсцисса точки, в которой производная принимает наибольшее значение).
Не дали ответа 1,97%.

Вариант 3.
На рисунке изображены график функции $y = f\left(x\right)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f\left(x\right)$ в точке x_0.



Ответ: – 1,25.

Верный ответ дали 53,52% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 1,25 – 16% (предположительно, не учли, что на рисунке график убывающей функции);
–0,8 – 13% (предположительно, получили обратную величину).
Не дали ответа 9,81%.

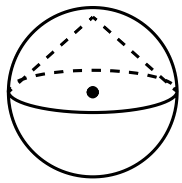
При выполнении задачи В8 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- неверное вычисление углового коэффициента прямой;
- неумение связать свойства функции с производной;
- невнимательное чтение условия.

Задача В9

Вариант 1.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

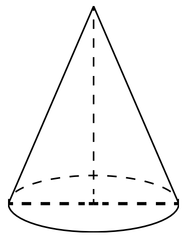


Ответ: 20.

Верный ответ дали	83,22% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы:	10 – 19% (вероятно, путаница в терминах «радиус» и «диаметр»);
	5 – 13% (вероятно, попытка угадать ответ).
Не дали ответа	7,60 %.

Вариант 3.

Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса.



Ответ: 40.

Верный ответ дали	76,86% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы:	20 – 29% (видимо, найден радиус основания конуса, а не диаметр);
	8 – 8% (видимо, найдена разность образующей и высоты).
Не дали ответа	4,74%.

При выполнении задачи В9 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- неумение применить теорему Пифагора к решению прямоугольного треугольника;
- вычислительные.

Задача В10

Вариант 1.

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: 0,08.

Верный ответ дали	72,24% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы:	0,8 – 8% (вероятно, вычислительная ошибка);
	0,09 – 7% (вероятно, округление до сотых отношения 7 к 76).
Не дали ответа	5,32%.

Вариант 3.
В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

Ответ: 0,74.

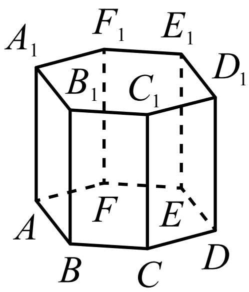
Верный ответ дали 80,28% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 0,26 – 24% (видимо, найдена вероятность противоположного события);
0,7 – 6% (видимо, округление до десятых).
Не дали ответа 2,34%.

При выполнении задачи B10 допущено много ошибок, массовыми среди которых являются:

- неверное прочтение условия задачи;
- нахождение вероятности другого события;
- вычислительные.

Задача B11

Вариант 1.
Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.



Ответ: 8.

Верный ответ дали 62,71% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 24 – 60% (предположительно, найден объём призмы);
12 – 8% (предположительно, ошибка в формуле объёма пирамиды).
Не дали ответа 8,01%.

При выполнении задачи B11 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- ошибочная формула объёма тела;
- вычислительные.

Задача B12

Вариант 1.
Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: 220,5.

Верный ответ дали 52,11% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 220 – 24% (видимо, округлили ответ до целых); 22,5 – 13% (видимо, вычислительная ошибка).
Не дали ответа 13,15%.

Вариант 3.
При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

Ответ: 312.

Верный ответ дали 62,00% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 96 – 9% (видимо, ошибка в вычислениях); 722 – 4% (видимо, ошибка в вычислениях).
Не дали ответа 14,26%.

При выполнении задачи B12 допущено много вычислительных ошибок.

Задача B13

Вариант 2.
Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

Ответ: 189.

Верный ответ дали 60,86% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 68,46 – 4% (вероятно, значение выражения $42 + 42 \cdot \frac{82-19}{100}$); 181 – 3,6% (вероятно, округление до целого значения выражения $\frac{42 \cdot 82}{19}$).
Не дали ответа 12,43%.

Вариант 4.
Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 6%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: 41.

Верный ответ дали 46,95% выполнявших этот вариант.
Массовые неверные ответы: 9 – 26% (вероятно, комбинация чисел $\frac{6 \cdot 15}{10}$);

3 – 24% (вероятно, комбинация чисел $\frac{6\cdot(15-10)}{10}$).

Не дали ответа 11,12%.

При выполнении задачи B13 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- ошибки, связанные с неправильным прочтением условия задачи и составлением уравнения;
- попытки получить ответ, манипулируя данными в условии числами;
- вычислительные ошибки.

Задача B14

Вариант 1.

Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+441}{x}$ на отрезке $[2;32]$

Ответ: 42

Верный ответ дали 63,10% выполнявших этот вариант.

Массовые неверные ответы: 222,5 –13 % (видимо, найдено наибольшее значение);

21 – 15% (видимо, найдена абсцисса точки минимума).

Не дали ответа 12,56%.

Вариант 2.

Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+36}{x}$

Ответ: 6.

Верный ответ дали 63,34% выполнявших этот вариант.

Массовые неверные ответы: -6 – 38% (вероятно, указана точка минимума);

0 – 12% (вероятно, ошибка в нахождении производной).

Не дали ответа 12,75%.

При выполнении задачи B14 допущено много ошибок как вычислительного характера, так и показывающих незнание и непонимание темы «Применение производной к исследованию функции».

Задача C1

Вариант 1.

а) Решите уравнение $15^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5p;\frac{13p}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{p}{4}+pk$, $k\in Z$; б) $\frac{21p}{4}$; $\frac{25p}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приступили к выполнению задания	72%
2 балла	34,5%
1 балл	10,1%
0 баллов	27,4%
Не приступали к решению	28%

Вариант 4.

а) Решите уравнение $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin\left(\frac{3p}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[p; \frac{5p}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{p}{2} + pk$, $k \in Z$; $\frac{5p}{6} + 2pn$, $n \in Z$; $-\frac{5p}{6} + 2pm$, $m \in Z$; б) $\frac{7p}{6}$; $\frac{3p}{2}$; $\frac{5p}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приступили к выполнению задания	27%
2 балла	10,1%
1 балл	6,8%
0 баллов	10,1%
Не приступали к решению	73%

Задача С2

Вариант 1.

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приступили к выполнению задания	17%
2 балла	6,2%
1 балл	4,4%
0 баллов	5,4%
Не приступали к решению	83%

Вариант 3.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 22, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $6:5$, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

Ответ: $176\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приступили к выполнению задания	24%
2 балла	9,6%
1 балл	4,7%
0 баллов	9,7%
Не приступали к решению	76%

Задача С3

Вариант 1.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{21x^2 + 3x - 12}{x-4} \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: -3; 0; $[1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Приступили к выполнению задания	34%
3 балла	6,4%
2 балла	2,8%
1 балл	8,8%
0 баллов	16%
Не приступали к решению	66%

Вариант 4.

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{1-x}{x-7} \le -1, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{4x-22}{x-7} \le x+2. \end{cases}$$

Ответ: $(6; 7)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Приступили к выполнению задания	10%
3 балла	2%
2 балла	0,4%
1 балл	3,8%
0 баллов	3,8%
Не приступали к решению	90%

Задача С4

Вариант 1.

Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Приступили к выполнению задания	23%
3 балла	4,6%
2 балла	3,5%
1 балл	1,9%
0 баллов	13%
Не приступали к решению	77%

Вариант 4.
Окружности радиусов 13 и 20 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K, MO_1 и NO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle MO_1O_2 = 120°$. Найдите MN.

Ответ: 7 или 37.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Приступили к выполнению задания	7%
3 балла	0,4%
2 балла	2,5%
1 балл	0,8%
0 баллов	3,3%
Не приступали к решению	93%

Задача C5

Вариант 1.
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{3}\right)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -1$, $a = -\frac{1}{3}$, $a = 0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a = -1$ и/или включением точки $a = -\frac{1}{3}$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -1$, $a = -\frac{1}{3}$, $a = 0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -1$, $a = -\frac{1}{3}$ или $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Приступили к выполнению задания	14%
4 балла	1,5%
3 балла	0,6%
2 балла	0,9%
1 балл	4,2%
0 баллов	6,7%
Не приступали к решению	86%

Вариант 4.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-\left|x+2+a\right|=\left|x-a-2\right|-\left(a+2\right)^2$$

имеет единственный корень.

Ответ: -4; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения *a*, но в ответ включено не более одного постороннего значения *a*	3
Обоснованно получено одно из значений *a*	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Приступили к выполнению задания	4%
4 балла	0,4%
3 балла	0,1%
2 балла	0,6%
1 балл	0,9%
0 баллов	2%
Не приступали к решению	96%

Задача С6

Вариант 1.

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор

9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; — оба набора задуманных чисел в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Приступили к выполнению задания	18%
4 балла	0,94%
3 балла	1,03%
2 балла	2,53%
1 балл	6,13%
0 баллов	7,37%
Не приступали к решению	82%

Вариант 4.

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -5, -2, 1, 3, 4, 6, 9. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Ответ: а) -5, 3, 6; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. *а*; — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснованное решение п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Статистика выполнения задания.

0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
92,69%	5,79%	1,19%	0,24%	0,09%

Приступили к выполнению задания	9%
4 балла	0,09%

3 балла	0,24%
2 балла	1,19%
1 балл	5,79%
0 баллов	1,69%
Не приступали к решению	91%